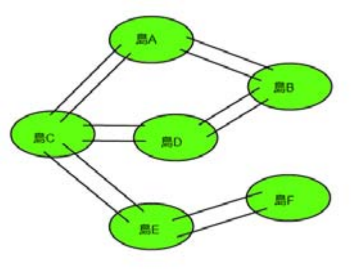
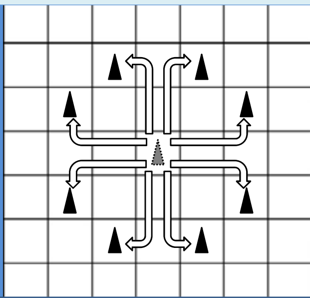
n次元におけるチェスのナイトによるハミルトン路問題
Problem of Hamilton Path with Knight in Chess in n-Dimensions

玉川学園高等部　3年　栗山和大
Tamagawa Academy　12th Kazuhiro Kuriyama



定義

ハミルトン路とは、グラフにおいて全ての点をたった一度だけ通る道のことをいう。



チェスのナイトの動きを、ナイトが存在するマス目から縦横4方向に2マス、そこから垂直に1マス移動する、計8通りの移動方法をナイトの動きと定義する。

先行研究について

私たちの研究は出発点と終点が異なるハミルトン開路であるが、海外では終点＝出発点に戻るハミルトン閉路の研究が「Closed Knight's Tours」という名で行われており最近まで気がつかなかった。
n次元化は2012年に成されており、今回の発表での手順に近い方法がとられている部分もあった。
Knight's Tours in Higher Dimensions,Joshua Erde,
Electronic Journal of Combinatorics: arXiv:1202.5548v1 [math.CO] 24 Feb 2012

2次元におけるナイトの動きにおけるハミルトン路の研究結果

初期段階：試行錯誤

7	12	23	18	5
22	17	6	11	24
13	8	15	4	19
16	21	2	25	10
1	14	9	20	3

4	19	22	31	34	7
23	30	5	8	21	32
18	3	20	33	6	35
29	24	27	14	9	12
26	17	2	11	36	15
1	28	25	16	13	10

25	4	15	46	43	6	17
14	41	26	5	16	47	44
3	24	33	42	45	18	7
40	13	38	27	34	31	48
23	2	35	32	37	8	19
12	39	28	21	10	49	30
1	22	11	36	29	20	9

36	57	16	5	34	55	18	7
15	4	35	56	17	6	33	54
58	37	50	39	48	43	8	19
3	14	45	42	51	40	53	32
26	59	38	49	44	47	20	9
13	2	25	46	41	52	31	64
60	27	12	23	62	29	10	21
1	24	61	28	11	22	63	30

左図のように具体的に構成してn×nのマス目がハミルトン路を持つか検証した。
その結果、5×5から20×20までのマス目がハミルトン路を持つことを確認した。
また、2×2、3×3、4×4がハミルトン路を持たないことを示した。

27	16	9	22	29	14	37	42	47	54	35	62	67	72	79	60
8	23	28	15	10	21	48	53	36	41	46	73	78	61	66	71
17	26	19	4	13	30	43	38	51	34	55	68	63	76	59	80
24	7	2	11	20	5	52	49	32	45	40	77	74	57	70	65
1	18	25	6	3	12	31	44	39	50	33	56	69	64	75	58

											177				
										176					
122													201		
103	96	113	120	101	94	71	90	83	78	73	202				
114	121	102	95	112	119	82	77	72	89	84					
97	104	115	108	93	100	91	70	87	74	79					
116	109	106	99	118	111	76	81	68	85	88					
105	98	117	110	107	92	69	86	75	80	67					
4	19	22	31	34	7	48	41	66	57	50					
23	30	5	8	21	32	39	56	49	46	65					
18	3	20	33	6	35	42	47	40	51	58					
29	24	27	14	9	12	61	38	55	64	45					
26	17	2	11	36	15	54	43	62	59	52					
1	28	25	16	13	10	37	60	53	44	63			256		

一般化：証明に向けたアイデア

右図(n=5k+1)のようにマスを連結して5×n(n=5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4)が、(1, 1)をスタートとし(n, 3)で終了するハミルトン路を持つことを示した。
上の結果とn=5〜9で5×nは(1, 1)出発で(n−1, 4)終了が, n×nは(1, 1)出発で(n−1, 2)終了が出来ることを用いて、n×nが(1, 1)をスタートとし(n−2, 1)で終了するハミルトン路を持つことを示す。
n×nが(n−5)×(n−5)、5×(n−5)、(n−5)×5、5×5のマス目が連結したマス目と考えて、nを5で割ったときの余りについて場合分けをして証明した。

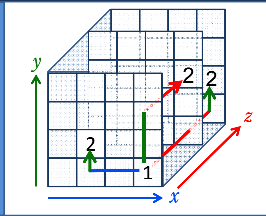
結論1

n×nは、n ≧5 のとき (1,1) をスタートとし (n−2 , 1) で終了するハミルトン路を持つ。

高次元におけるナイトの動きによるハミルトン路の研究結果

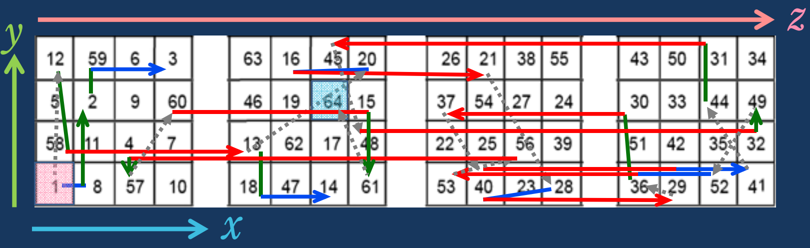
定義

n次元でのナイトの動き
n個ある座標軸から1マス移動する軸、2マス移動する軸をそれぞれ1つずつ選び、それぞれの軸の正負どちらに移動するかを決定し移動するものとする。

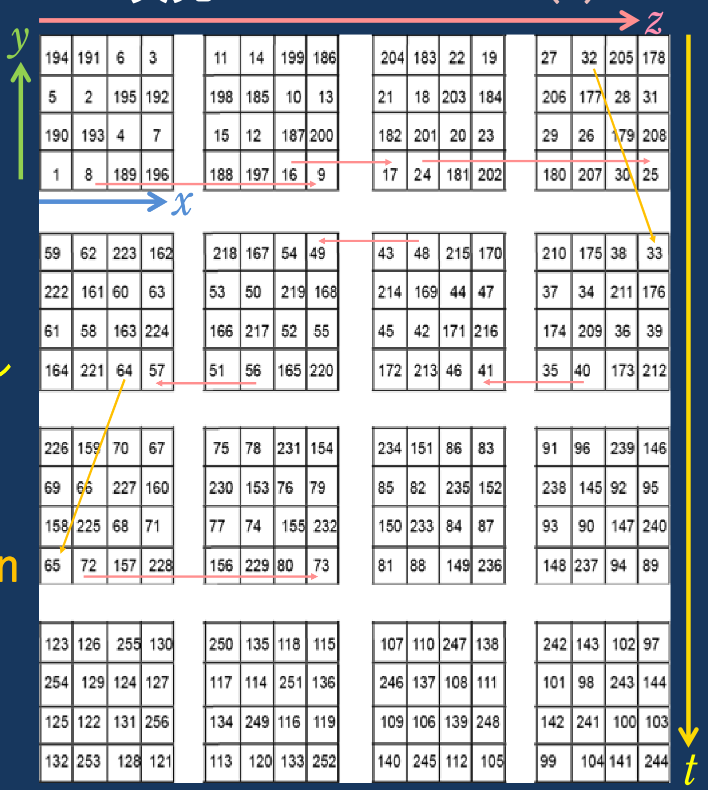


3次元と4次元の試行錯誤の結果、およびn次元での予想

3次元 4×4×4…4(3)



4次元 4×4×4×4…4(4)



2次元では4×4はハミルトン路を持たないが、3次元の4×4×4、4次元の4×4×4×4はハミルトン路を構成できた。

このことから、
3次元以上について、n×n×・・・×n×nがハミルトン路を持つためのnの条件は、n≧4であると予想された。

ここでは、全ての辺がaのb次元のマス目をa(b)と表すとする

証明(のアウトライン)

1、n≧5のとき、任意のnについてn(2)が(1,1)をスタートとし(n−2,1)で終了するハミルトン路を持つときに、n(m) (m:m≧2の整数)がハミルトン路を持つことを示す。

2、n≧5のnについて、n(2) が(1,1)をスタートとし(n−2,1)で終了するハミルトン路を持つことを示す。

以上でn≧5のnについて、n(m) (m:m≧2)がハミルトン路を持つことを示せるため、次にn=4について考える。

3、n=4のとき、4(3)が(1,1,1)をスタートとし(3,1,4)で終了するハミルトン路を見つけ、4(3)が(1,1,1)をスタートとし(3,1,4)で終了するハミルトン路とき、4(m) (m:m≧3)がハミルトン路を持つことを示す。

結論2

n(m)がハミルトン路を持つためのn,mの条件は、n≧4かつm≧3、または、n≧5かつm=2