様式４

2512　学校法人 玉川学園　玉川学園高等部・中学部
Tamagawa Academy

**ヘロンの公式の対称性を保った証明とその拡張**

**Symmetrical proof of Heron’s formula and its generalization**

前田 英汰
Eita Maeda

**Abstract**

Using the elementary geometry, we prove symmetrically the Heron formula, and we show that the area formula of the convex polygon with the inscribed circle is symmetric about the line segments $x_1, x_2\cdots$connecting the vertex and the contact point of the inscribed circle.

## １．研究の背景と目的

ヘロンの公式は、三角形の面積を三辺の長さで表す公式で、各辺の入れ替えに対して対称であるが、面積が長方形を元にするため一般的な証明過程ではその対称性はくずれる。そこで私は対称性を保ったまま初等幾何的に証明する方法を研究し三角形を元にした面積の可能性を探究した。また、対称性を保った証明で見出した手法を手掛かりに内接円をもつ一般の凸多角形に対して対称的な面積公式が得られるか研究した。

## ２．方法

内接円をもつ凸多角形について、隣接した３辺の延長に描く傍接円を利用し三角形の相似など初等幾何と基本対称式の性質を利用して、内接円の半径 $r$ に対して、頂点と内接円の接点を結ぶ線分 $x_1, x_2\cdots$に対称的な方程式を求める。

## ３．結果

初等幾何的手法で、内接円を持つ凸多角形の頂点と内接円の接点を結ぶ線分 $x_1, x_2\cdots$の $m$ 次基本対称式を $P(m)$,内接円の半径 $r$ とすると、$2n+1$, or$2n+2$（$n=1, 2, \cdots$）角形に対して次の方程式が成立することを示した。三角形の場合は証明過程も対称性を保った。

$$\sum_{s=o}^{n}(-1)^s P(2s+1)r^{2k-2s} = \mathrm{P(1)r^{2n} - P(3)r^{2n-2} + \cdots + (-1)^n P(2n+1)} = 0$$

・定理　内接円を持つ凸多角形の面積公式は、$x_1, x_2\cdots$について対称的である。

## ４．先行研究との関係

先行研究は星形多角形に三角関数と加法定理を使うが、本研究は凸多角形に対し頂点部分を辺で切断し傍接円を付加する手法と基本対称式の性質を使い初等幾何的に示した。

## ５．結論

ヘロンの公式を対称的に証明し、内接円を持つ凸多角形の面積公式が頂点と内接円の接点を結ぶ線分 $x_1, x_2\cdots$について対称的であることを初等幾何的に示した。

## ６．参考文献

小平邦彦「幾何への誘い」岩波現代文庫, 硲文夫「理工系の線形代数」培風館，Mirko Radic “Some relations and properties concerning tangential polygons” Mathematical Communications 4(1999) 197-206, マスオ「高校数学の美しい物語」http://mathtrain.jp/

## ７．キーワード

ヘロン　面積　円に外接する凸多角形　内接円　傍接円　対称式